Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Développements :

Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein, Théorème de Fejer.

Bibliographie :

Gourdon, Rombaldi analyse réelle, Hirsch Lacombe, ZQ, Pommellet, OA, Demailly, Candelpergher intégration, Faraut.

Rapport du jury 2017 :

Cette leçon comporte un certain nombre de classiques comme par exemple les polynômes de Bernstein, éventuellement agrémenté d'une estimation de la vitesse de convergence (avec le module de continuité). Il n'est pas absurde de voir la formule de Taylor comme une approximation locale d'une fonction par des polynômes. Les polynômes d'interpolation de Lagrange peuvent être mentionnés en mettant en évidence les problèmes qu'ils engendrent du point de vue de l'approximation. Pour aller plus loin, le théorème de Fejér (versions L^1, L^p ou $C(T)$) offre aussi la possibilité d'un joli développement, surtout s'il est agrémenté d'applications (polynômes trigonométriques lacunaires, injectivité de la transformée de Fourier sur L^1 , . . .), mais on peut aussi s'intéresser à la convolution avec d'autres noyaux.

Rapport du jury 2018

Cette leçon comporte un certain nombre de classiques comme par exemple les polynômes de Bernstein, éventuellement agrémentés d'une estimation de la vitesse de convergence (avec le module de continuité). Il n'est pas absurde de voir la formule de Taylor comme une approximation locale d'une fonction par des polynômes. Les polynômes d'interpolation de Lagrange peuvent être mentionnés en mettant en évidence les problèmes qu'ils engendrent du point de vue de l'approximation. La résolution de l'équation de la chaleur et/ou des ondes peut trouver sa place dans cette leçon. Pour aller plus loin, le théorème de Fejér (versions L^1, L^p ou $C(T)$) offre aussi la possibilité d'un joli développement, surtout s'il est agrémenté d'applications (polynômes trigonométriques lacunaires, injectivité de la transformée de Fourier sur L^1, ...), mais on peut aussi s'intéresser à la convolution avec d'autres noyaux.

Intro dans Pommellet p175 et Demailly p21.

1 Approximation par des polynômes

1.1 Approximation locale de fonctions régulières

Remarque 1. *Formuler avec des polynomes :* $T_a^n = \sum f^{(k)}(a)/k!(X-a)^k$.

Proposition 2 (Gourdon analyse p75)**.** *Formule de Taylor Young.*

Exemple 3 (Gourdon p89)**.** *Développement limité de* $exp(x)$, $\sin(x)$.

Proposition 4 (Gourdon p75)**.** *Formule de Taylor avec reste intégral.*

Application 5. *Lemme de Morse ?*

Application 6 (Gourdon p250)**.** *Théorème de Bernstein.*

Proposition 7 (Gourdon p74)**.** *Formule et inégalité de Taylor Lagrange.*

Application 8 (Gourdon)**.** *Inégalité de Kolmogorov.*

Exemple 9 (Romb p186)**.** $V\,|\sin(x) - x + x^3/3!| \leq |x^5|/5!$.

1.2 Approximation de fonctions continues sur un compact

Proposition 10 (Hirsch)**.** *Théorème de Stone Weierstrass.*

Proposition 11 (Gourdon p224)**.** *Théorème de Weierstrass.*

Proposition 12 (ZQ p518)**.** *Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein.*

Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue on définit* $B_n(x)$ *le n-ième polynôme de Bernstein. Alors* B_n *converge uniformément vers* f *sur* $[0,1]$, *et il existe* $C > 0$ *telle que* $||f - B_n||_\infty \leq C.w(\sqrt{1/n})$, *où* $w(h) = sup(|f(x) - f(y)|, |x-y| \leq h)$ *est le module d'uniforme continuité de* f.

Application 13. *On a ainsi une suite explicite de polynômes convergeant uniformément vers* f *et dont on a minoré la vitesse de convergence.*

Contre exemple 14 (Pommellet p176)**.** *[Gourdon p127] Si* (P_n) *est une suite de polynômes convergeant uniformément sur un intervalle non borné* I *vers une fonction* f *alors* f *est un polynôme.*

Application 15 (Pommellet p179)**.** *Théorème des moments.*

Application 16. *Densité des fonctions continues nulle part dérivables. (Utilise Weierstrass.)*

1.3 Approximation en moyenne quadratique

Définition 17 (OA p110). *Fonction poids.*

Définition 18 (OA p110). *On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesue de Lebesgue. Muni de son produit scalaire $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\rho(x)dx$, c'est un espace de Hilbert contenant les fonctions polynômiales.*

Proposition 19 (OA p11). *Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux, vérifiant $deg(P_n) = n$, que l'on appelle "famille des polynômes orthogonaux associée à ρ". On l'obtient en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(X^n)_n$.*

Proposition 20 (OA p111). *Polynôme de meilleure approximation.*

Théorème 21. *—OA p112] S'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx < +\infty$, alors $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.*

Contre exemple 22 (OA p141). *Trouver (I,ρ) pour lesquels ce n'est pas vrai.*
(Si $\int_I |x|^n\rho(x)dx \leq (n!)^2$ c'est bon)

Application 23 (OA p112). *[Candel p278] Application aux méthodes de Gauss.*

Remarque 24 (Demailly). *Théorème sur les méthodes de Gauss.*
Les zéros des polygones orthogonaux interviennent dans la méthode de Gauss pour le calcul d'intégrales.

2 Interpolation polynomiale

Remarque 25. *On sait que dans un cadre bien précis, on peut approcher une fonction par un polynome. Ici, on cherche à voir comment "en pratique" se fait cette approximation et on veut quantifier l'erreur. C'est la théorie de l'interpolation. Pour moi, il y a deux problématiques : "connaissant une fonction (dans son intégralité si on peut dire", est-ce qu'on peut l'approcher par un polynome. Ca c'est ce qu'on fait dans la première partie. Et puis, la problématique de l'interpolation : connaissant que la fonction en un nombre d'abscisses données, est ce qu'on peut toujours approximer ; c'est l'interpolation.*

2.1 Interpolation de Lagrange

Définition 26 (Demailly p21). *[Candel p271][Pommellet p175] Pour $a_1 < .. < a_n \in \mathbb{R}$ et $(b_1,..,b_n) \in \mathbb{R}^n$, un polynôme interpolateur de Lagrange des b_i en les a_i est un polynôme P de degré $\leq n$ tel que $P(a_i) = b_i \forall 1 \leq i \leq n$.*

Proposition 27 (Demailly p22). *Unique polynôme interpolateur, donné par...*

Proposition 28 (Dem p22). *Formule d'erreur de l'interpolation de $f(a_i)$ en les a_i par rapport à f.*

Proposition 29 (Dem p23). *Majoration de la formule d'erreur. Remarque sur l'erreur.*

Proposition 30 (Pommellet p175). *Si la suite des dérivées de f est uniformément bornée alors la suite des interpolateurs converge uniformément vers f. Cependant dans la pratique, on a aussi ce résultat par Taylor Lagrange. Ici on a en plus l'aspect algo. Fonctions rares.*

Exemple 31 (Dem p27). *Majoration de l'erreur pour des points équidistants.*

Définition 32 (Dem p29). *Polynômes de Tchebychev et points d'interpolation de Tchebychev.*

Proposition 33 (Dem p29). *Calcul de l'erreur avec les points de Tchebychev.*

2.2 Stabilité et convergence

Définition 34 (Demailly p46). *Opérateur d'interpolation de Lagrange.*

Proposition 35 (Demailly). *$||f - L_n(f)|| \leq (1+\Gamma)d(f, P_N)$.*

Proposition 36 (Dem p48). *Majoration de la norme de l'opérateur d'interpolation de Lagrange pour les points équidistants.*

Application 37. *D'après Banach Steinhaus, il existe une fonction continue dont le polynôme d'interpolation diverge.*

Proposition 38 (Dem p36). *Phénomène de Runge avec $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ sur $[-1,1]$ pour laquelle la suite des polynômes d'interpolation pour une subdivision donnée diverge point par point.*
f est analytique mais la suite de ses polynômes d'interpolation (points équidistants) diverge.

Remarque 39. *C'est difficile d'estimer les normes de π_{n+1} et de $f^{(n+1)}$.*

2.3 Applications aux formules de quadrature : calcul d'intégrales

Remarque 40 (Pommellet p369). *Sur un petit intervalle, on approxime f par son polynôme d'interpolation de Lagrange. On obtient alors une méthode de quadrature de l'intégrale de f. On effectue une subdivision de $[a,b]$ puis sur chaque segment de la division on remplace f par son polynome d'interpolation en certains points.*

Proposition 41 (Pommellet p369). *Décrire rectange, trapèze et Simpson.*
Lister quelques polynômes d'interpolation, les méthodes de quadrature correspondantes, et leurs ordres et erreurs. (On calcule les erreurs avec Taylor-reste intégral)

3 Approximation par des polynômes trigonométriques

Remarque 42. *Idée : On veut faire converger la suite des sommes partielles* $(D_N * f)$ *mais c'est toujours plus facile de faire converger en moyenne de Césaro, d'où l'introduction du noyau de Féjer, qui va former une approximation de l'unité, ce qui fait fonctionner les théorèmes de convergence ! Par contre, attention, on a un résultat de convergence sur la moyenne de Césaro et non pas sur la suite... Donc il faut demander des hypothèses supplémentaires pour obtenir des résultats sur la suite.*

3.1 Polynômes trigonométriques et séries de Fourier

Définition 43 (Gourdon p256)**.** *Polynôme trigonométrique.*

Définition 44 (Gourdon p258)**.** *[OA p122][Faraut p148] Coefficient de Fourier pour* $f \in L^1_{2\pi}$*.*

Remarque 45 (Gourdon p256)**.** *Pour* $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(x)$*, on a* $c_n = c_n(P)$*.*

Définition 46. $S_N(f)$*, la somme partielle de la série de Fourier de* f*, série de Fourier de* f*.*

Proposition 47 (OA p126)**.** *Lemme de Riemann Lesbesgue.*

3.2 Convergence quadratique

Proposition 48. *Coefficient de Fourier dans* L^2*.*

Proposition 49. *La famille* (e_n) *est une base hilbertienne de* $L^2_{2\pi}$ *d'après le théorème de Stone Weierstrass.*

Proposition 50 (Gourdon p259)**.** *[OA p123]* $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n(x)$ *est aussi le projeté orthogonal de* f *sur* $Vect(e_n, -N \leq n \leq N)$*, qui converge donc dans* L^2 *vers le projeté orthogonal sur* $Vect(e_n)$*. On a donc une convergence dans* L^2 *de la série de Fourier de* f*.* $||S_n(f) - f||_2 \to 0$.

De plus, $||f||^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 = inf_{g \in P_N} ||f-g||^2$.

Application 51 (Gourdon p259)**.** *Inégalité de Bessel.*

Remarque 52 (OA p124)**.** *Signification de cette égalité.*

Proposition 53 (OA p124)**.** *Egalité de Parseval.*

Application 54 (Gourdon p200-201)**.** *[Faraut p151] Calcul de sommes.*

3.3 Convergence uniforme

Proposition 55. *Théorème de STone Weierstrass pour les polynômes trigonométriques.*

Définition 56 (OA p127)**.** *Sommes de Cesàro* σ_n*, noyau de Dirichlet, noyau de Fejer.*

Proposition 57 (OA p128)**.** $S_N(f) = f * D_N$ *et* $\sigma_N(f) = f * K_N$*.*

Théorème 58 (OA p128)**.** *Théorème de Fejér.*

Application 59 (OA p128)**.** *Densité des polynômes trigonométriques dans l'espace des fonctions continues muni de la norme uniforme et dans les* L^p*.*

Application 60 (Leçon beaulieu)**.** *La transformée de Fourier est injective.*

Deux variables aléatoires avec mêmes fonctions caractéristiques ont même loi.

Proposition 61 (Karine)**.** *Si* f *est continue et sa série de Fourier converge simplement alors sa somme coincide avec* f*.*

Proposition 62. *Si* f *est continue, et si* $\sum_n |c_n(f)| < +\infty$*, alors* $S_N(f)$ *converge uniformément vers* f*.*

Proposition 63 (Candel p316)**.** *Théorème de convergence normale.*

Si f *est* C^0 *et* C^1 *par morceaux, alors la série de Fourier de* f *converge uniformément vers* f*.*

Application 64. *Equation de la chaleur sur une barre.*

3.4 Convergence ponctuelle

Proposition 65 (OA p130)**.** *[Faraut p154] Théorème de convergence ponctuelle.*

Soit f 2π*-périodique et intégrable, qui admet en un* x *des limites à droite et à gauche. Alors* $S_N(f)(x)$ *converge vers* $1/2(f(x^+) + f(x^-))$*.*

Théorème 66 (OA p131)**.** *Théorème de Dirichlet.*

Si f *est juste* C^1 *par morceaux, alors la série de Fourier de* f *converge uniformément vers* $x \mapsto 1/2(f(x^+) + f(x^-))$*.*

Remarque 67. *Il existe des fonctions dont la série de Fourier diverge.*

Application 68 (Faraut)**.** *Somme des* $1/k^2$*.*